-SUP- en poche

MATHS

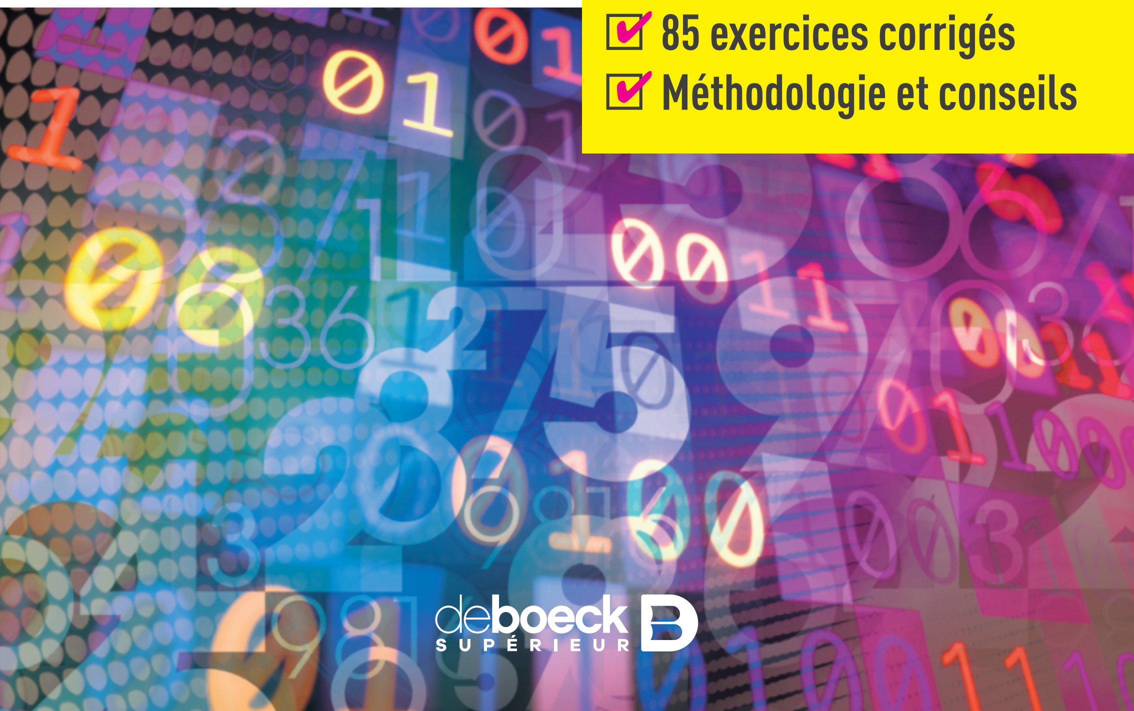
L1 / L2

# Probabilités

## et tests d'hypothèse

François Cottet-Emard

- 18 fiches
- Résumés de cours
- 85 exercices corrigés
- Méthodologie et conseils



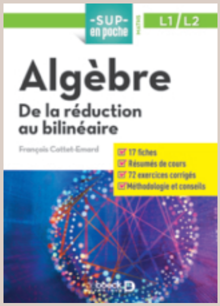
de boeck SUPÉRIEUR

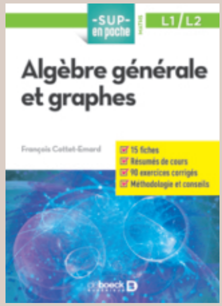
# Probabilités

deboeck SUPÉRIEUR

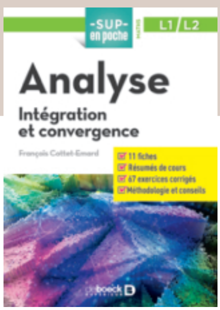
## DANS LA MÊME COLLECTION

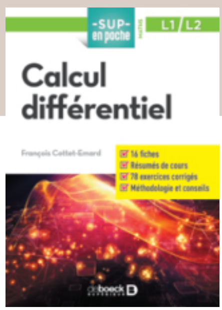
**Sup en poche** est une collection destinée aux étudiants du 1er cycle, essentiellement en Licence 1 et 2. Son objectif est de permettre à l'étudiant de réviser et s'entraîner en vue de réussir ses examens. Chaque ouvrage est composé de fiches proposant des cours résumés suivis d'exercices corrigés pas à pas.





-SUP-
en poche

MATHS

L1 / L2

# Probabilités
## et tests d'hypothèse

François Cottet-Emard

deboeck SUPÉRIEUR

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com


Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve



Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : mars 2020
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2020/13647/019

ISSN : 2566-2724
ISBN : 978-2-8073-2231-8

# Sommaire

# Introduction

Ce volume de probabilité complète les six volumes précédents de la collection. Il commence par les dénombrements classiques et les probabilités sur un univers finis, en insistant sur le schéma de Bernoulli et la loi binomiale. Il se continue ensuite par les univers dénombrables et les grandes lois classiques comme la loi de Poisson et la loi géométrique. Les probabilités continues sont abordées dans l'optique L1L2 des variables aléatoires à densité. Les couples de variables aléatoires, plutôt du niveau L3, ne sont pas abordés ici. Les inégalités classiques, les théorèmes de convergence et les approximations de lois par d'autres sont largement détaillés, de même que les intervalles de fluctuation et de confiance, notions toujours délicates. Une large part est ensuite consacrée aux tests d'hypothèse, entre autre avec l'utilisation de la loi normale ou de la loi de Student, la loi du $\chi^2$ et la loi de Fisher-Snédecor : trois fiches leur sont consacrées. L'ouvrage se termine par les chaînes de Markov irréductibles avec les conditions nécessaires et suffisantes classiques de convergence, entre autre celles avec les valeurs propres.

Les logiciels commerciaux (Excel) ou gratuits (Xcas, Open Office) remplacent maintenant les tables de valeurs numériques d'autrefois, et sont plus précis. La fiche 9 détaille l'utilisation d'Excel 2010, Open Office, Xcas. On fera attention que l'objectif d'un calcul diffère (en plus de la syntaxe) d'un logiciel à l'autre, dans certains cas. De plus, les améliorations récentes ont introduit de nouvelles instructions, comme par exemple dans Excel. Malgré tout, nombre de problèmes se ramènent à travailler avec la loi normale centrée réduite, et la table de ses valeurs classiques est incontournable, et est donnée.

Les trois ouvrages précédents d'algèbre et les trois d'analyse de la collection étaient plutôt destinés aux étudiants des filières mathématique et informatique, mais celui-ci s'adresse à un public plus large de L1L2 comme aux étudiants des filières de santé : les tests avec la loi du $\chi^2$ ou de Fisher leur sont particulièrement destinés, on les rencontre beaucoup dans les comparaisons d'efficacité de traitements, par exemple.

Les paragraphes pouvant être sautés en première lecture sont indiqués par le sigle **ASPL** en rouge. Peu de prérequis sont nécessaires, les dénombrements sont faits dans la première fiche.

Comme dans les premiers volumes de la collection, chaque fiche comporte le cours, des exemples complets et des exercices corrigés. Ces exercices sont assez peu « mathématiques », mais reposent essentiellement sur des situations de la vie. Les démonstrations les plus longues sont reportées en fin de volume, seules les plus courtes ou les plus pertinentes sont dans le corps de chaque fiche. Des problèmes récapitulatifs complètent l'ouvrage. La présentation est attrayante, en quatre couleurs, avec des points de méthodologie quand il le faut, et l'ensemble se lit facilement. Tout est rigoureux, toutes les preuves de niveau L1L2 sont données. On notera enfin que le mot « événement » s'écrit aussi « évènement », orthographe adoptée ici.

Pour Alice, Audrey et Emilie qui sauront se reconnaître.

# COURS 1
# Dénombrements

[ MOTS-CLÉS : combinaison, arrangement, factorielle, partie, ordre, binôme, Newton, Pascal ]

La lettre $n$ désigne un entier supérieur ou égal à $1$, et $p$ un entier compris entre $0$ et $n$ inclus. $E$ est un ensemble quelconque à $n$ éléments. Rappelons que la notion d'ordre n'existe pas dans un *ensemble* : $\{1, 2, 3\}$ et $\{2, 1, 3\}$ sont le même *ensemble*. Par contre la *suite* $(1, 2, 3)$ et la *suite* $(2, 1, 3)$ sont distinctes.

## 1 Permutation de $n$ éléments : factorielle

**Exemple 1.a :** soit $E = \{1, 2, 3\}$. Il y a six bijections de $E$ sur lui-même, par exemple $\sigma$ définie par $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2$, et les cinq analogues : tout élément de $E$ est l'image d'un et d'un seul élément de $E$. Une telle bijection s'appelle permutation de $E$.

Une permutation d'un ensemble $E$ est une bijection de $E$ sur lui-même.

- Quand $E$ est un ensemble sur lequel on a un ordre ou une numérotation naturel, comme par exemple l'intervalle $[1..n]$ des entiers naturels de $1$ à $n$, on considère $E$ comme une *suite* ordonnée, et on représente la permutation par la *suite* ordonnée des images des éléments de $E$.

**Exemple 1.b :** il y a 6 permutations de $E = \{1, 2, 3\}$, se représentant par les suites ordonnées $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$. La notation $(2, 3, 1)$ désigne la permutation définie par $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1$. On considère *en pratique* $E$ comme la suite ordonnée $(1, 2, 3)$.

- Le nombre de permutations d'un ensemble $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ à $n$ éléments se calcule aisément : il y a $n$ valeurs possibles pour l'image de $e_1$, puis $n - 1$ images possibles pour l'image de $e_2$ et ainsi de suite, jusqu'à une seule valeur possible pour l'image de $e_n$. On a donc :

**Théorème 1.** Il y a $n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$ permutations d'un ensemble à $n$ éléments. C'est le produit de tous les entiers de $1$ à $n$ : on l'appelle « factorielle n » et on le note $n!$

**Exemple 2.a :** on a $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

- On a la relation de récurrence $n! = n \times (n-1)!$. Par convention, on ajoute $0! = 1$, c'est très pratique et vrai aussi !

**Exemple 2.b :** on a $5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$.

**Exemple 3.a :** anagrammes du prénom AUDREY. Un anagramme est une permutation quelconque des lettres d'un mot, que cela ait un sens en français ou non. Ici, nous avons $6$ lettres différentes, et les $6!$ permutations des 6 lettres nous donnent $6! = 720$ anagrammes distincts.

**Exemple 3.b :** anagrammes de ANNE. Il y a 4 lettres, mais on a deux fois le N. Si les deux N étaient distincts (bleu/rouge), on aurait $4!$ anagrammes, mais ANNE avec le premier N rouge et le second en bleu, est le même que ANNE avec le premier N en bleu et le second en rouge. Chaque anagramme est trouvé deux fois, et la réponse est $4!/2 = 12$. Pour ANNA, on en a seulement 6.

## 2 Arrangements de $n$ éléments $p$ à $p$

Un arrangement de $n$ objets $p$ à $p$ est une suite ordonnée de $p$ objets distincts parmi les $n$.

- En général, on utilise les arrangements des entiers $\{1, 2, \cdots, n\}$. On prend donc une suite ordonnée de $p$ entiers distincts choisis parmi ces $n$ entiers.

**Exemple 4 :** un arrangement de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ trois à trois est une suite ordonnée comme $(2, 4, 1)$ ou $(1, 2, 4)$, qui sont deux arrangements différents puisque l'ordre intervient, ou $(1, 3, 5)$.

- Il est important de connaître le nombre d'arrangements de $n$ objets $p$ à $p$, la démonstration est donnée en annexe :

**Théorème 2.** Le nombre $A_n^p$ d'arrangements de $n$ objets $p$ à $p$ est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ : c'est le produit des $p$ entiers décroissants à partir de $n$.

- Pour $p = n$, on a $A_n^n = n!$ : normal puisqu'un arrangement de $n$ objets $n$ à $n$ est une permutation de ces $n$ objets.

**Exemple 5 :** $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$. $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$. $A_n^1 = n$.

## 3 Combinaisons de $n$ éléments $p$ à $p$

Une combinaison de $n$ objets $p$ à $p$ est un paquet sans ordre de $p$ objets choisis parmi ces $n$ objets.

- Autre façon de dire : on se place dans un ensemble à $n$ éléments, et une combinaison des $n$ éléments $p$ à $p$ est une partie de $E$ contenant $p$ éléments.

**Exemple 6 :** soit $E = \{1, 2, 3\}$. Les combinaisons de ces trois éléments 2 à 2 sont $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$. La combinaison $\{1, 2\}$ peut aussi s'écrire $\{2, 1\}$ puisqu'il n'y a pas d'ordre dans les combinaisons.

**Méthodologie comparative**

Dans les arrangements, les éléments sont ordonnés. Dans les combinaisons, il n'y a pas d'ordre.

- Le nombre de combinaisons de $n$ objets $p$ à $p$, noté $\binom{n}{p}$, joue un rôle fondamental en mathématiques. La définition des combinaisons nous dit que :

**Méthodologie**

$\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments.

- Le nombre de combinaisons de $n$ éléments $p$ à $p$ est donnée par (preuve en annexe) :

**Théorème 3.** On a $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$

En haut, on a le produit des $p$ entiers décroissants à partir de $n$. En bas on a le produit des $p$ entiers décroissants à partir de $p$.

- On a les formules fondamentales suivantes, démontrées en annexe ainsi que le théorème 4 :

$$\binom{0}{0} = 1; \binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{n}{n} = 1; \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

**Théorème 4.** Pour $1 \leq p \leq n-1$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

**Exemple 7.a :** $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}; \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

**Exemple 7.b :** $\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20.$

**Exemple 8.a :** on a un sac avec 2 boules rouges et 3 blanches, et on en tire deux sans remise (i.e. soit on tire les deux ensembles, soit l'une après l'autre sans remettre la première dans le sac). Pour avoir un tirage bicolore, on a $\binom{3}{1} = 3$ choix pour la blanche et $\binom{2}{1} = 2$ pour la rouge, soit $3 \times 2 = 6$ tirages possibles.

## Méthodologie

Avec un sac contenant des boules dites indiscernables, on peut se demander si $3$ blanches et $2$ rouges forment un ensemble : les boules sont certes indiscernables au toucher, mais on peut moralement les numéroter $r_1, r_2, b_1, b_2, b_3$ et obtenir des objets distincts, i.e. un ensemble !

**Exemple 8.b :** prenons un sac avec $8$ boules de même couleur, et on en tire 2 sans remise. Le nombre de tirages possibles est $\binom{8}{2}$, même si on a envie de dire qu'il y en a un seul !

**Exemple 9 :** on tire sans remise 4 cartes d'un jeu de 52. Pour obtenir 2 $\heartsuit$, un $\diamondsuit$ et un $\spadesuit$, il y a $\binom{13}{2} = 13 \times 12/2 = 78$ choix pour les $\heartsuit$, et $\binom{13}{1} = 13$ pour les autres. On a donc $78 \times 13^2 = 13182$ choix possibles.

### Terminologie

- Dans un tirage sans remise, on sort les objets du sac soit simultanément, soit l'un après l'autre mais sans remettre qui que ce soit dans le sac.
- Dans un tirage avec remise, on tire un objet puis on le remet dans le sac avant de tirer le suivant. Les tirages successifs sont donc indépendants.

**Remarque :** il est quelquefois utile de donner un sens à $\binom{n}{p}$ avec $p > n$ : sa valeur est égale à $0$. C'est pratique dans l'exemple suivant.

**Exemple 10.a :** soient $n \geq 0, m \geq 0$ et $0 \leq k \leq n+m$. Calculons $\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$, somme dans laquelle $i$ est susceptible d'être plus grand que $n$ et $k-i$ plus grand que $m$.

**Exemple 10.b :** soit $E$ un ensemble à $n+m$ éléments, dont $n$ rouges et $m$ bleus. Une partie à $k$ éléments s'obtient en prenant $i$ éléments rouges et $k-i$ bleus, pour tous les $i$ « possibles ». On a donc $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$, expression dans laquelle certaines « combinaisons » sont nulles.

## 4 Relations entre factorielle, arrangement et combinaison

- La démonstration (annexe) du théorème 3 nous dit que $\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$.
- On a, par définition de la factorielle, $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$, puisque la simplification par $(n-p)!$ laisse au numérateur les entiers de $n$ à $n-p+1$ inclus. On en déduit :

**Théorème 5.** On a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

- Cette expression est très utile dans les exercices théoriques. Dans les calculs pratiques, elle est trop lourde, il faut revenir à l'expression de base donnée en théorème 4.

## 5 Binôme de Newton, triangle de Pascal

- Les $\binom{n}{p}$ sont appelés aussi coefficients binomiaux, car ils interviennent dans la formule du binôme de Newton :

**Théorème 6.** On a $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

- Le triangle de Pascal permet de calculer aisément les coefficients binomiaux, par addition seule :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
\end{array}
$$

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$

- On passe de la ligne $n$ à la ligne $n+1$ de la façon suivante : en dessous (et au milieu) de chaque intervalle défini par deux nombres de la ligne $n$, on met la somme de ces deux nombre. Par exemple en quatrième ligne, $4$ est la somme de $1$ et $3$ (chiffres en bleu), et $6$ est la somme de $3$ et $3$. En sixième ligne ligne $20$ est la somme de $10$ et $10$ de la ligne cinq (en rouge). Et on rajoute un chiffre $1$ en début et en queue de chaque nouvelle ligne.
- Les coefficients de la ligne $n$ se retrouvent dans le calcul de $(a+b)^n$. On a $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ qui fait intervenir la deuxième ligne. On a $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ qui fait intervenir la troisième ligne. On a $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ qui utilise la quatrième ligne et ainsi de suite.

**Exemple 11.a :** Newton donne $(1+1)^n = 2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

**Exemple 11.b :** il donne aussi $(1-1)^n = 0 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p}$.

**Exemple 10.c :** sachant que $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}$, et en utilisant la formule du coefficient de $x^k$ dans le produit de deux polynômes, on retrouve le résultat de 10.b.

# 1 EXERCICES

## Exercice 1

On se promène sur la grille du plan formée par les points à coordonnées entières $\geq 0$. On peut passer du point $(n, m)$ à $(n+1, m)$ (avance horizontale) ou à $(n, m+1)$ (avance verticale). On ne peut ni reculer, ni aller en oblique.

**1.** Combien a-t-on de chemins possibles pour aller du point $(0, 0)$ au point $(p, q)$ ? On regardera le nombre de trajets horizontaux et le nombre de trajets verticaux dans un tel chemin.

**2.** Au point $(n, m)$ (avec $0 \leq n \leq p$ et $0 \leq m \leq q$) il y a un gâteau. Combien a-t-on de chemins pour arriver en $(p, q)$ en ayant mangé le gâteau ?

## Exercice 2

Combien d'anagrammes des mots CHIEN, POISON, POISSONS, ASSASSINATS peut-on former ?

## Exercice 3

Le conseil compte $56$ conseillers dont $20$ vont voter pour $A$ et $36$ pour $B$ lors de l'élection du maire. On prend un échantillon de $15$ conseillers.

**1.** Combien a-t-on d'échantillons possibles ?

**2.** Combien a-t-on d'échantillons où tout le monde va voter $A$ ?

**3.** Soit $0 \leq k \leq 15$. Combien a-t-on d'échantillons où $k$ personnes vont voter $A$ et les autres $B$ ?

## Exercice 4

Une urne contient $10$ boules rouges, $5$ noires, $3$ jaunes et $2$ vertes. On tire quatre boules sans remise.

**1.** Combien a-t-on de tirages possibles ?

**2.** Combien a-t-on de tirages avec une boule de chaque couleur ?

**3.** Combien a-t-on de tirages avec exactement $2$ boules rouges ?

**4.** Combien a-t-on de tirages sans aucune boule rouge ?

**5.** Combien a-t-on de tirages avec au moins une boule rouge ?

# 1 CORRIGÉS

## Exercice 1

**1.** On effectue au total $p+q$ petites avances, dont obligatoirement $p$ horizontales et $q$ verticales. Le chemin est complètement déterminé par la donnée des $p$ avances horizontales parmi les $p+q$. Il s'agit, parmi les $p+q$ petits trajets, de fixer les $p$ trajets horizontaux : il y a $\binom{p+q}{p}$ façons de le faire.

**2.** Il s'agit de compter le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à $(p,q)$ en passant par $(n,m)$. C'est le produit du nombre de chemin allant de $(0,0)$ à $(n,m)$, soit $\binom{n+m}{n}$ et du nombre de chemins allant de $(n,m)$ à $(p,q)$. À une translation près, le deuxième nombre de chemins est égal au nombre de chemin allant de $(0,0)$ à $(p-n,q-m)$, soit $\binom{p+q-n-m}{p-n}$. Le nombre de chemins gourmands est $\binom{n+m}{n} \times \binom{p+q-n-m}{p-n}$.

## Exercice 2

Les 5 lettres de CHIEN sont différentes, et il y a donc $5!$ façons de les permuter. Si l'on distinguait les 2 « O » de POISON , il y aurait $6!$ anagrammes possibles. Mais il y a $2!$ façon de permuter ces « O » entre eux : cela donne $6!/2!$ anagrammes. Comme il y a 8 lettres, mais deux fois le « O » et trois fois le « S », cela donne $8!/(2! \times 3!)$ anagrammes de POISSONS. Comme le « A » intervient trois fois et le « S » cinq fois, on a $11!/(3! \times 5!)$ anagrammes.

## Exercice 3

**1.** Un échantillon est une combinaison des $56$ personnes $15$ à $15$ : il y en a $\binom{56}{15}$.

**2.** Les $15$ personnes sont à prendre parmi les $20$ partisans de $A$. Il y a $\binom{20}{15}$ tels échantillons.

**3.** Il faut choisir $k$ conseillers parmi les $20$ partisans de $A$, ce qui fait $\binom{20}{k}$ possibilités, et $15-k$ parmi les $36$ partisans de $B$, ce qui fait $\binom{36}{15-k}$ possibilités : cela donne $\binom{20}{k} \times \binom{36}{15-k}$ possibilités.

## Exercice 4

**1.** Un tirage est un paquet sans ordre de $4$ boules parmi $20$ : il y en a $\binom{20}{4}$.

**2.** Il y a $10$ choix possibles pour la rouge, et ainsi de suite pour les autres couleurs. Cela donne $10 \times 5 \times 3 \times 2$ tirages possibles.

**3.** Il y a $10$ boules rouges et $10$ non rouges. Il faut tirer $2$ boules parmi les rouges, soit $\binom{10}{2}$ possibilités, et $2$ parmi les $10$ non rouges, soit aussi $\binom{10}{2}$ possibilités. Le nombre total de choix est le produit des deux, soit $\binom{10}{2}^2$.

**4.** Les boules sont à tirer parmi les $10$ non rouges, soit $\binom{10}{4}$ possibilités.

**5.** Le contraire de « au moins une rouge » est « aucune rouge ». Notre ensemble est le complémentaire (dans l'ensemble de tous les tirages possibles) de l'ensemble défini en question 4. Son cardinal est donc $\binom{20}{4} - \binom{10}{4}$.

COURS

# 2 Univers fini et probabilité

[ MOTS-CLÉS : expérience, aléatoire, univers, évènement, probabilité, élémentaire, germe, incompatible, et, ou, contraire ]

Cette fiche présente les notions fondamentales d'univers associé à une expérience aléatoire, d'évènement, et de probabilité sur cet univers. L'univers est ici un ensemble fini. On fera attention à la numérotation des exemples : exemple 1.a, exemple 1.b ... se réfèrent à la même expérience aléatoire.

## 1 Expérience aléatoire

Une expérience est dite aléatoire quand on connaît parfaitement l'ensemble $\Omega$ de ses issues (résultats) possibles, mais que l'on ne sait pas laquelle de ces issues va se réaliser.

**Exemple 1.a :** on lance une seule fois un dé à six faces. Une issue est le numéro de la face qui sort, et il y a donc 6 issues possibles, qui sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$. A priori, on ne sait pas laquelle va se réaliser.

**Exemple 2.a :** on lance deux fois une pièce de monnaie « pile/face », en s'intéressant à l'ordre de sortie des deux tirages. Il y a 4 issues possibles, que l'on schématise en (p,p), (p,f), (f,p), (f,f), la première lettre désignant la face sortie au premier lancer, et l'autre celle du second lancer.

**Point Pédagogie**

Les expériences aléatoires dont l'ensemble des issues n'est pas fini seront étudiées ultérieurement.

## 2 Univers associé à une expérience aléatoire

L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire s'appelle univers associé à cette expérience. On le note souvent $\Omega$.

**Exemple 1.b :** on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**Exemple 2.b :** on a $\Omega = \{(p,p),(p,f),(f,p),(f,f)\}$.

**Exemple 3.a :** dans les deux lancers de la pièce, on pourrait s'intéresser uniquement aux issues « deux fois pile », « deux fois faces », « une de chaque » : l'univers contient 3 éléments seulement. La différence avec l'exemple 2 est que l'on se moque de l'ordre de sortie des faces de la pièces, c'est aussi la situation où on lance les deux pièces *simultanément*. Cet univers est plus pénible à utiliser que celui du 2.b.

## 3 Évènement dans un univers

Un évènement est une partie quelconque de l'univers. L'évènement $A$ est réalisé lorsque l'issue de l'expérience appartient à $A$.

- Un évènement se décrit soit par l'énumération des issues qu'il renferme, soit par une phrase en bon français.

**Exemple 1.c :** l'évènement « on sort une face paire » est la partie $A = \{2,4,6\}$. L'évènement « on sort le 5 » est la partie $B = \{5\}$. L'évènement « on ne sort ni le 5 ni le 4 » est $C = \{1,2,3,6\}$.

**Exemple 2.c :** l'univers associé à deux lancers d'une pièce compte 4 éléments, et contient donc $2^4 = 16$ parties. Il y a 16 évènements possibles pour cette expérience. Par exemple $A = \{(p,p)\}$ signifiant « on obtient deux fois pile », $B = \{(p,p),(p,f)\}$ signifiant « le premier lancer donne pile », $C = \{(p,f),(f,p),(f,f)\}$ signifiant « on obtient au moins une face » et ainsi de suite.

- L'ensemble vide $\emptyset$ est une partie de l'univers, que l'on peut appeler « évènement impossible » : il est intéressant de le garder, comme on va le voir ci-dessous. $\Omega$ lui-même est un évènement, celui qui est certain d'être réalisé.
- Définissons tout de suite une notion vitale, purement ensembliste :

Deux évènements $A$ et $B$ sont incompatibles lorsque, dans l'univers $\Omega$, les parties $A$ et $B$ sont disjointes : on a $A \cap B = \emptyset$. Cela signifie surtout que les deux évènements ne peuvent pas être réalisés simultanément.

**Exemple 4 :** dans l'exemple 2, les évènements « deux faces identiques » et « une face de chaque » sont incompatibles.

**Point de logique courante**

Cette notion d'incompatibilité est en général évidente, sans besoin de preuve ensembliste : en général, pas la peine de modéliser l'univers sous-jacent.

**Exemple 5 :** « j'ai un nombre impair d'enfants » et « j'ai autant de filles que de garçons » sont incompatibles, et ceci quel que soit le nombre d'enfants. L'univers ne sert pas.

## 4 Opérations entre évènements

- La définition, a priori ensembliste, d'un évènement, nous fait penser aux opérations entre parties d'un même ensemble. Voici la traduction ensembles/probabilités des opérations classiques qui sont fondamentales. $A$ et $B$ désignent deux évènements, à savoir deux parties de l'univers $\Omega$ des issues possibles de l'expérience aléatoire.
- Il est vital de comprendre les deux formulations de ce paragraphe, celle au sens courant de « relations » entre évènements de la vie courante avec des « et » et des « ou », assez évidentes et de logique courante, et celle de la théorie des ensembles qui semble plus rigoureuse avec des $\cap$ et des $\cup$, mais plus abstraite.

### 4.1 Évènement contraire de $A$

C'est l'évènement $\overline{A}$ qui est réalisé lorsque $A$ ne l'est pas. $A$ est donc le contraire de $\overline{A}$. On a $\overline{A} = \Omega \setminus A$, le complémentaire de $A$ dans l'univers, au sens ensembliste.

**Exemple 1.d :** dans l'exemple 1.c, on a $\overline{C} = \{4, 5\}$, à savoir « on sort le 4 ou le 5 ».

**Exemple 2.d :** dans l'exemple 2.c, on a $\overline{C} = \{(p, p)\}$, i.e. « aucune face ».

### 4.2 Deux évènements réalisés simultanément

Les évènements $A$ et $B$ sont réalisés simultanément lorsque l'issue obtenue est à la fois dans $A$ et $B$, i.e. dans $A \cap B$. Il s'agit donc de l'intersection ensembliste $A \cap B$, et on note $A \cap B$ cet évènement.

**Exemple 1.e :** dans l'exemple 1.c, on a $A \cap B = \{2, 6\}$, à savoir « on sort le 2 ou le 6 ».

**Exemple 2.e :** dans l'exemple 2.c, on a $B \cap C = \{(p, f)\}$, i.e. « d'abord pile ensuite face ».

### 4.3 L'un ou l'autre de deux évènements est réalisé

$A$ ou $B$ est réalisé quand l'issue obtenue se trouve dans $A$ ou dans $B$ : c'est donc la réunion ensembliste $A \cup B$, et on le note toujours $A \cup B$.

**Exemple 1.f :** dans l'exemple 1.c, on a $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, à savoir « on sort 2 ou 4 ou 5 ou 6 ».

**Exemple 2.f :** dans l'exemple 2.c, on a $C =$ « une face de chaque » ou « deux faces ». C'est aussi le contraire de « deux piles ».

### 4.4 Évènements incompatibles

Deux évènements $A$ et $B$ sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$, l'évènement impossible.

**Exemple 1.g :** dans l'exemple 1, « sortir une face paire » et « sortir une face impaire » sont incompatibles.

**Exemple 2.g :** dans l'exemple 2, « une face et une pile » et « deux piles » sont incompatibles.

- Plus généralement, « $A_1, A_2, \cdots, A_k$ sont incompatibles » signifie plus précisément « deux à deux incompatibles » : on a $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$.

**Exemple 6.a :** on est avec une famille ayant $5$ enfants. $A_1 =$ « au maximum une fille », $A_2 =$ « 2 ou 3 filles », $A_3 =$ « au moins 4 filles » sont incompatibles. On notera que $A_1$, $A_2$, $A_3$ forment une partition de $\Omega$.

**Exemple 6.b :** énoncer ces incompatibilités ne demande pas de préciser l'univers $\Omega$. Si on veut le faire, on peut prendre l'ensemble des suites (ordonnées suivant les dates de naissances) $(a_1, \cdots, a_5)$ où $a_k$ vaut « f » ou « g ».

## 5 Système complet d'évènement dans un univers

On dit que les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_p$ forment un système complet d'évènements lorsqu'ils sont 2 à 2 incompatibles et que leur réunion est l'univers tout entier : $\Omega = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_p$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$.

- Toute issue de l'expérience appartient à un et un seul des $A_1, A_2, \cdots, A_p$. Le signe $\sqcup$ signifie une réunion où les ensembles sont deux à deux disjoints.

**Exemple 7 :** on s'intéresse au jour de naissance d'une personne (du 1 janvier au 31 décembre). Les $12$ évènements « né en janvier »,...,« né en décembre » forment un système complet d'évènements.

- Si $B$ est un évènement quelconque, et $A_1, \cdots, A_p$ un système complet d'évènements, on peut écrire

$$B = (B \cap A_1) \sqcup (B \cap A_2) \sqcup \cdots \sqcup (B \cap A_p)$$

et cette partition de $B$ en évènements 2 à 2 incompatibles sera souvent très utile, entre autre avec la formule des probabilités totales qui sera vue dans la fiche suivante.

## 6 Tableau récapitulatif

- Voici un tableau récapitulant les deux aspects, théorie des ensembles et probabilités.

| Ensembles | Probabilités |
|---|---|
| Partie | Évènement |
| Parties disjointes | Évènements incompatibles |
| Complémentaire | Évènement contraire |
| Réunion | L'un au moins des évènements est réalisé |
| Intersection | Les évènements sont réalisés en même temps |
| Partition | Système complet d'évènements |

- La réunion et l'intersection se généralisent à un nombre quelconque d'évènements.
- Les opérations décrites ci-dessus dans le cadre d'un univers a priori fini se généralisent à une expérience aléatoire quelconque, à un univers quelconque, et cela sera utilisé sans justification dans la suite de l'ouvrage.

## 7 Approche courante de la notion de probabilité

- En langage courant, c'est le pourcentage de chances qu'un évènement se produise.

**Point de vue courant**

Parmi tous les évènements possibles associés à une expérience aléatoire, le bon sens et le quotidien disent que certains ont « bien plus de chances » de se réaliser que d'autres.

**Exemple 8.a :** dans 100 lancers d'une pièce équilibrée, on se dit que « avoir 48 piles » a plus de chances de se réaliser que « obtenir uniquement des faces ».

**Exemple 8.b :** à la roulette, on se dit que le 22 venant de sortir, il est peu probable qu'il ressorte au coup suivant et qu'on ferait mieux de jouer le 17.

- Pour savoir qui a raison, on a besoin d'une définition rigoureuse de la probabilité, et elle passe par l'univers.

## 8 Germes de probabilité sur un univers

- Notons $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ les éléments de l'univers $\Omega$, à savoir les issues possibles de l'expérience. L'idée est de se donner une « probabilité élémentaire » pour que chaque $\omega_k$ se réalise.

À chaque $\omega_k \in \Omega$ on associe un réel $p_k \in ]0,1[$ qui est la probabilité élémentaire que l'issue $\omega_k$ se réalise dans l'expérience. Ces nombres vérifient
$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

- Chaque $p_k$ est connu de façon *naturelle* par la description de l'expérience aléatoire. Les $p_k$ sont aussi appelés « germes de probabilité » sur $\Omega$.

**Exemple 1.h :** pour le lancer d'un dé **équilibré**, on a $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = 1/6$.

**Exemple 2.h :** pour les deux lancers d'une pièce équilibrée, on a $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$ : les quatre issues possibles ont autant de chances l'une que l'autre, et c'est donc $1/4$.

**Exemple 3.b :** attention à l'exemple 3.a, les probabilités élémentaires sont plus compliquées. Pour « deux faces » et « deux piles », on a toujours un germe égal à $1/4$. Par contre, pour « une sortie de chaque », qui peut se réaliser de 2 façons différentes, le germe vaut $1/2$.

**Exemple 6.c :** dans l'exemple 6.b, on a défini un univers à $2^5 = 32$ éléments. Dans l'hypothèse où la probabilité de naissance d'une fille ou d'un garçon vaut $0.5$, les 32 germes sont égaux à $1/32$.

**Exemple 6.d :** si la probabilité de naissance d'une fille est de $0.48$ et celle d'un garçon de $0.52$, on verra que $p(a_1, \cdots, a_5) = 0.48^f \times 0.52^g$ où $f$ est le nombre de filles et $g$ celui de garçons.

## 9 Probabilité d'un évènement

- Soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ l'ensemble des issues de l'expérience. Un évènement $A$ est de la forme $A = \{\omega_{i_1}, \cdots, \omega_{i_k}\}$ : il contient un certain nombre d'issues de l'expérience, notées ici avec les indices $i_1, \cdots, i_k$. On a la définition assez logique :

> La probabilité d'un évènement est la somme des germes de probabilités des issues constituant cet évènement : $P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}$ avec les notations précédentes.

- Notons que la probabilité d'un évènement se note en principe avec un « P » majuscule, alors qu'un germe (probabilité élémentaire) se note avec un « p » minuscule. Mais on a $P(\{\omega_k\}) = p_k$.
- Si $A = \emptyset$ (évènement impossible), on a bien $P(A) = 0$, évènement de probabilité nulle. Pour $A = \Omega$ (évènement certain, il est toujours réalisé puisqu'il contient toutes les issues possibles), on a $P(A) = 1$.
- Cette définition conduit à la propriété absolument fondamentale suivante :

> Si $A$ et $B$ sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- Elle se généralise à un nombre quelconques d'évènements incompatibles : $P(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)$. Dans cette notation l'opérateur carré $\sqcup$ signifie que la réunion des évènements/parties se fait avec des évènements incompatibles (parties 2 à 2 disjointes).

-SUP- en poche

MATHS

L1 / L2

# Probabilités
## et tests d'hypothèse

**Cet ouvrage expose les probabilités depuis les dénombrements, univers et germes de probabilité jusqu'aux tests d'hypothèses et les chaînes de Markov. Les variables aléatoires et les lois discrètes et continues classiques sont bien detaillées, ainsi que celles de Student, khi2 et Fisher en vue des tests. Les logiciels actuels sont systématiquement utilisés dans les applications numériques.**

**Chaque fiche contient :**

- **des rappels de cours :** définitions, théorèmes, formules importantes ;
- **des points de méthodologie** et des conseils ;
- **des exemples détaillés** pour illustrer les notions ou apprendre à résoudre les questions ;
- **des exercices** et leurs corrigés détaillés.

François Cottet-Emard

a enseigné l'algèbre, l'analyse et les probabilités à l'Université de Paris XI dans chacun des 4 semestres des années L1 et L2 mathématiques – informatique – physique. Il est auteur de nombreux ouvrages aux éditions De Boeck Supérieur.



ISBN : 978-2-8073-2231-8

9 782807 322318

Prix TTC : 16 €

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®